E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1988

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Série P

Vendredi 13 Mai 1988 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Partie A :

1°) a. Vérifier que, pour tout réel x et tout couple (p,q) d'entiers tels que : $p \geqslant q > 0$, on peut prolonger par continuité en 0 les fonctions :

$$t \longmapsto \frac{\sin^p(xt)}{t^q}, \quad t \longmapsto \frac{\sin^p(xt)}{\sin^q t} \quad \text{et} \quad t \longmapsto \frac{[1-\cos(xt)]^p}{t^{2q}}.$$

b. Prouver que la fonction : $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge (par continuité en 0) en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\sigma_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\,dt$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin^2 t}\,dt, \quad v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{t^2}\,dt$$

et $$w_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\tan^2 t}\,dt.$$

2°) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction impaire et 2π- périodique telle que : $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ et $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$, pour tout $x \in]0,\pi[$.

a. Déterminer les coefficients de Fourier de φ. Préciser la convergence et la somme de la série de Fourier de φ.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n et tout réel x :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} \sin[(2k+1)x] = \int_0^x \frac{\sin[(2n+2)t]}{\sin t}\,dt.$$

En déduire que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

3°) On se propose de retrouver ce dernier résultat par une autre méthode.

a. Calculer $\sigma_{n+1} - \sigma_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Déterminer le développement en série entière de la fonction Arctan.

c. Donner l'expression sous forme intégrale du reste d'ordre n. En déduire, grâce à une intégration, la limite de la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4°) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. On rappelle que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et a même limite que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (théorème de CESARO).

En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, et préciser sa limite.

5°) a. Calculer $w_n - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que la suite $\left(\frac{w_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, et préciser sa limite.

b. Prouver que la suite $\left(\frac{v_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, et préciser sa limite.

6°) a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ est convergente et déduire sa valeur de ce qui précède.

b. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,dt$ est convergente, et préciser sa valeur.

7°) Soit x un réel non nul.

a. Etant donné a dans $]0, +\infty[$, prouver que :

$\int_0^{2a} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt = \int_0^{ax} \frac{\sin(2t)}{t}\,dt$, puis, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_0^{ax} \frac{\sin(2t)}{t}\,dt = \frac{\sin^2(ax)}{ax} + \int_0^{ax} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.

b. Montrer que l'intégrale : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$ est convergente et préciser sa valeur.

Partie B

On désigne par E l'espace vectoriel réel des applications lipschitziennes et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que E est normé par l'application $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

1°) Soit f un élément de E et n un entier naturel non nul.

a. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale :

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{1 - \cos(nt)}{t^2} \, dt.$$

est absolument convergente.

b. Prouver que l'application $f_n : x \longmapsto f_n(x)$ appartient à E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ [T_n(f)](x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{1 - \cos(nt)}{t^2} \, dt.$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que T_n est un endomorphisme de E, et que T_n est une application lipschitzienne de rapport 1. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres éventuelles de T_n ?

b. Montrer que 1 est valeur propre de T_n (on pourra considérer une application constante sur $\mathbb{R}$).

Pour tout réel α, on note g_α l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_\alpha(x) = \cos(\alpha x).$$

3°) Soit α un réel et n un entier naturel non nul.

a. Vérifier que g_α appartient à E.

b. Montrer que g_α est un vecteur propre de T_n.

On note $\lambda(\alpha,n)$ la valeur propre de T_n associée à g_α.

4°) Soit α un réel.

a. Etant donné n dans $\mathbb{N}^*$, exprimer, à l'aide d'une intégration par parties, $\lambda(\alpha,n)$ en fonction de $I(\alpha)$, $I(\alpha + n)$ et $I(\alpha-n)$ (voir A.7°b). En déduire la valeur de $\lambda(\alpha,n)$ suivant α et n.

b. Prouver que la suite d'applications $(T_n(g_\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g_α.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail